Fundamentos de Finanças
Curso de Ciências Econonômicas
Universidade Federal de Pelotas (UFPel)

Prof. Regis A. Ely

Departamento de Economia
Universidade Federal de Pelotas (UFPel)

Terminologia

- *Principal:* é o valor inicial de um empréstimo ou financiamento. Também é chamado de capital inicial ou valor presente. Símbolo: P (ou PV na HP12C).
- *Montante:* é o valor total a ser pago ou recebido com a finalidade de quitar ou encerrar um empréstimo. Também é chamado de valor futuro. Símbolo: S (ou FV na HP12C).
- *Prazo:* tempo decorrente para término da operação contratada. No curso iremos considerar que o ano comercial tem 360 dias e o mês 30 dias. Símbolo: n (também n na HP12C).

Terminologia

- *Juro:* montante pago de juros devido ao aluguel ou empréstimo do dinheiro. Símbolo: J.
- *Prestações:* é o pagamento parcelado de um empréstimo, podendo ser anuidade, mensalidade, etc. Símbolo: R (ou PMT na HP12C).
- *Taxa de juros:* é o preço do dinheiro e depende do prazo e do capital emprestado, sendo $i = \frac{J}{P}$. Símbolo: i (também i na HP12C).

Taxa de Juros

- Toda taxa de juros é definida por um valor percentual e uma unidade de tempo, ex: 13% ao ano. Se a unidade de tempo não estiver bem definida, a taxa não está bem definida.
- Normalmente abreviamos a unidade de tempo para a.a., a.s. ou a.m., para denotar ao ano, ao semestre e ao mês, respectivamente.
- Em nossas fórmulas matemáticas, denotaremos a taxa de juros (i) sempre em centenas, ou seja, 7% equivale a 0,07.
- Já na HP12C, as taxas de juros devem ser digitadas em seus valores percentuais, ou seja 7% equivale a 7.

Tipos de juros

- *Juros simples:* são calculados sempre com base no principal.
- *Juros compostos:* são calculados com base no principal mais o somatório dos juros nos períodos anteriores. Dizemos que os juros são capitalizados pois os juros gerados em um período passam a comportar-se como capital para o cálculo dos juros dos períodos seguintes.

Período de capitalização

- O período de capitalização é a unidade de tempo que indica a periodicidade com que os juros compostos são calculados e incorporados ao capital.
- Nem sempre a periodicidade é igual a unidade de tempo em que a taxa de juros foi informada. Ex: 12% ao ano capitalizados mensalmente.

Taxas equivalentes de juros

- *Taxas equivalentes de juros:* são aquelas que, informadas em unidades diferentes de tempo, ao serem aplicadas durante o mesmo período e sobre o mesmo capital, reproduzem a mesma quantia de juros.
- Exemplos:
  1. Juros simples -> 1% a.m e 12% a.a. são taxas equivalentes.
  2. Juros compostos -> 0,95% a.m e 12% a.a. são taxas equivalentes.

Taxas proporcionais de juros

- *Taxas proporcionais de juros:* são aquelas que mantém uma relação de proporcionalidade com as unidades de tempo em que são informadas.
- Exemplo: 12% a.a. é proporcional à 1% a.m.
- Note que com juros simples, taxas proporcionais são também taxas equivalentes. Isso não é válido para juros compostos.

Fluxo de caixa

- *Fluxo de caixa:* é uma sequência de recebimentos e pagamentos ao longo do tempo. Pode ser apresentado em forma de tabela ou gráfico.

Mês	Recebimentos	Pagamentos	Valor Líquido
Jan	2.000,00	1.500,00	500,00
Fev	4.000,00	4.300,00	-300,00
Mar	8.000,00	6.500,00	1.500,00
Abr	4.300,00	2.900,00	1.400,00

Empréstimo com juros simples

- Os juros simples sempre incidem sobre o capital inicial.
- *Exemplo:* considere um empréstimo de R$ 10.000,00 a uma taxa de juros simples de 70% ao ano durante 4 anos.

Ano	Saldo inicial	Juros ($J = P \times i$)	Saldo final
0			10.000,00
1	10.000,00	7.000,00	17.000,00
2	17.000,00	7.000,00	24.000,00
3	24.000,00	7.000,00	31.000,00
4	31.000,00	7.000,00	38.000,00
Soma		28.000,00	

Fórmulas do juros simples

- *Montante de juros:* $\boxed{J = P \times i \times n}$.
- Logo, temos: $\boxed{P = \frac{J}{in}}$ $\boxed{i = \frac{J}{Pn}}$ e $\boxed{n = \frac{J}{Pi}}$.

Fórmulas do juros simples

- Podemos calcular o montante final somando os juros e o principal:

$$\boxed{S = P + J = P(1 + in)}$$

- Para encontrar o Principal, a Taxa de Juros ou o Prazo basta isolá-los na fórmula anterior:

$$\boxed{P = \frac{S}{1+in}} \quad \boxed{i = \frac{[S/P-1]}{n}} \quad \boxed{n = \frac{[S/P-1]}{i}}$$

Empréstimo com juros compostos

- Os juros compostos sempre incidem sobre a soma do capital inicial com os juros dos períodos anteriores.
- *Exemplo:* considere um empréstimo de R$ 10.000,00 a uma taxa de juros simples de 70% ao ano durante 4 anos.

Ano	Saldo inicial	Juros ($J = P \times i$)	Saldo final
0			10.000,00
1	10.000,00	7.000,00	17.000,00
2	17.000,00	11.900,00	28.900,00
3	28.900,00	20.230,00	49.130,00
4	49.130,00	34.391,00	83.521,00
Soma		73.521,00	

Fórmulas do juros composto

- *Montante final:* $\boxed{S = P(1+i)^n}$.
- Logo, temos:

$$\boxed{P = \frac{S}{(1+i)^n}} \; \boxed{i = \left(\frac{S}{P}\right)^{1/n} - 1} \text{ e } \boxed{n = \frac{\ln(S/P)}{\ln(1+i)}}.$$

Períodos fracionários

- Devemos adotar uma convenção específica para lidar com prazos não inteiros.
- Denotamos n o número de períodos inteiros e p/q o período fracionário, onde $p < q$.
- *Convenção linear:* $S_{n,p/q} = P(1+i)^n(1+ip/q)$.
- *Convenção exponencial:* $S_{n,p/q} = P(1+i)^{n+p/q}$.
- A convenção linear renderá mais juros na parcela não inteira do que a convenção exponencial.
- Com juros simples, a convenção é sempre linear.

Tipos de taxas de juros

- *Taxa efetiva de juros:* quando o período de capitalização é o mesmo da unidade de tempo em que a taxa de juros foi informada.
- *Taxa nominal de juros:* quando a taxa de juros é informada em um período diferente do que a capitalização.
- Para descobrir a taxa efetiva, basta encontrar a taxa proporcional na unidade de tempo da capitalização.

Taxas equivalentes

- *Juros simples:* com juros simples, taxas proporcionais são equivalentes. Para mudar a unidade de tempo de uma taxa, basta multiplicá-la pela relação de proporcionalidade, de modo que $i_k = i_y \times p$.
- *Exemplos:* $i_a = i_m \times 12$, $i_a = i_s \times 2$, $i_a = i_t \times 4$.
- *Juros compostos:* nesse caso devemos capitalizar a taxa proporcional, de modo que $1 + i_k = (1 + i_y)^p$.
- *Exemplos:* $(1 + i_a) = (1 + i_m)^{12}$, $(1 + i_a) = (1 + i_s)^2$, $(1 + i_a) = (1 + i_t)^4$.
- Lembre de utilizar o prazo n na mesma unidade de tempo da nova taxa.

Títulos de crédito

- *Títulos de crédito:* são instrumentos legais utilizados para formalizar dívidas que serão pagas no futuro, em prazo previamente estipulado. São ativos financeiros endossáveis, que podem ser negociados.
- *Desconto:* é um prêmio pela antecipação do vencimento de um título de crédito. A este tipo de negociação denominamos desconto de títulos.
- Os títulos devem possuir as seguintes informações:
  1. Quem deve pagar;
  2. Quanto deve ser pago (ou a forma de cálculo);
  3. Em que data (ou o prazo a partir da emissão);
  4. A quem será pago;

Exemplos de títulos

- Privados:
    1. Notas promissórias;
    2. Duplicatas;
    3. Letras de câmbio;
    4. Debêntures;
    5. CDBs;
    6. Letras imobiliárias.
- Públicos
    1. Letras do Tesouro Nacional (LTN);
    2. Obrigações do Tesouro Nacional (OTN);
    3. LFT, NTN, etc.

Operação de desconto

- Todos os títulos devem ter bens e serviços associados a eles. Títulos sem lastro são títulos "frios", sendo alvo de fiscalização do Banco Central.
- A operação de desconto é a compra de um título mediante a transferência, por endosso, de sua propriedade ao comprador.

Operação de desconto

- O preço pago pelo comprador se denomina *valor descontado*, e é inferior ao *valor de resgate* (valor nominal ou valor de face do título).
- A diferença entre o valor de resgate (S) e o valor descontado (P) é o desconto (D), ou ágio.

$$\boxed{D = S - P}$$

Desconto bancário simples

- *Desconto bancário simples:* é o chamado simples, ou comercial simples, sendo obtido através da multiplicação do valor de resgate pela taxa de desconto e pelo prazo a decorrer do vencimento.

$$\boxed{D = Sdn}$$

- Podemos calcular o valor descontado pela fórmula:

$$\boxed{P = S(1 - dn)}$$

Taxa implícita de juros

- *Taxa implícita de juros:* é a taxa, usualmente composta, que aplicada ao valor descontado (P) reproduz o valor de resgate (S) de uma operação de desconto, no mesmo período considerado.

$$\boxed{i = (S/P)^{1/n} - 1}$$

- A taxa implícita de juros pode ser interpretada como:
  1. Rentabilidade efetiva para o banco;
  2. Custo efetivo para a empresa.

Outros tipos de descontos

- Na operação de desconto, pode ser utilizada a capitalização simples ou composta, e a incidência da taxa pode ser no valor de resgate ou no valor descontado.

Capitalização	Incide sobre valor de resgate	Incide sobre valor descontado
Simples	Bancário Simples $P = S(1 - dn)$	Racional Simples $P = \frac{S}{(1+in)}$
Composta	Bancário Composto $P = S(1 - d)^n$	Racional Composto $P = \frac{S}{(1+i)^n}$

- Em geral, o desconto bancário simples é utilizado nas operações de financiamento de curto prazo, enquanto que o desconto racional composto é utilizado nas operações de longo prazo.

Definição de anuidades

- Anuidades são sucessões de pagamentos ou recebimentos exigíveis em épocas determinadas, destinadas a extinguir uma dívida ou constituir um capital.
- As anuidades podem ser classificadas de diversas formas. Nesta seção focaremos em anuidades temporárias, constantes e periódicas.

Classificação das anuidades

1. Quanto ao prazo:
   1.1 Temporárias
   1.2 Perpétuas
2. Quanto ao valor dos termos:
   2.1 Constante
   2.2 Variável
3. Quanto à periodicidade:
   3.1 Periódica
   3.2 Não-periódica
4. Quanto à forma de pagamento:
   4.1 Imediatas: 1º pagamento no 1º período
      4.1.1 Postecipadas: no final do período
      4.1.2 Antecipadas: no início (com entrada)
   4.2 Diferidas: 1º pagamento após o 1º período

Valor atual de um fluxo de caixa

- É a soma dos valores atuais (principais) de cada um dos termos do fluxo de caixa.

$$\boxed{VA = \frac{R_0}{(1+i)^0} + \frac{R_1}{(1+i)^1} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R_n}{(1+i)^n}}$$

Valor futuro de um fluxo de caixa

- É a soma dos montantes finais de cada um dos termos do fluxo de caixa.

$$\boxed{S = R_0(1+i)^n + R_1(1+i)^{n-1} + \ldots + R_n(1+i)^0}$$

Valor atual em uma data focal

- O valor atual de um fluxo de caixa é o valor atual na data focal zero, enquanto que o valor futuro é o valor atual na data focal n.
- Para calcularmos o valor atual em uma data focal x, onde $0 < x < n$, somamos os montantes dos termos anteriores a esta data com os valores presentes dos termos posteriores.

$$\boxed{VA_x = R_0(1+i)^x + R_1(1+i)^{x-1} + \ldots + R_x(1+i)^0 + \frac{R_{x+1}}{(1+i)^1} + \ldots + \frac{R_n}{(1+i)^n}}$$

Anuidades postecipadas

- Consideraremos o caso de anuidades temporárias, constantes, periódicas e postecipadas.
- Este é o caso em que o primeiro pagamento se dá no final do primeiro período. Ex: crediário sem entrada.

$$\boxed{P = \frac{R}{(1+i)^1} + \frac{R}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n}}$$

Fórmulas da anuidade postecipada

- A fórmula anterior pode ser resumida como:

$$\boxed{P = R\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}}$$

- Ao isolar o R obtemos a prestação a partir do principal:

$$\boxed{R = P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}}$$

Montante da anuidade postecipada

- Quando temos juros compostos vale que $S = P(1+i)^n$. Logo, substituindo P pela fórmula anterior temos:

$$\boxed{S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right](1+i)^n}$$

- Ou então:

$$\boxed{S = R\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}}$$

Observações sobre anuidade postecipada

- Note que todas estas fórmulas servem apenas para o caso de prestações idênticas, sendo que se elas são variáveis devemos aplicar a fórmula do fluxo de caixa.
- Não é possível isolar a taxa (i) na fórmula da anuidade postecipada, de modo que se quisermos obter a taxa a partir da prestação e do principal, devemos utilizar técnicas de análise numérica presentes na HP12C.

Anuidades antecipadas

- Consideraremos o caso de anuidades temporárias, constantes, periódicas e antecipadas.
- Este é o caso em que o primeiro pagamento se dá no ato da compra, seguido por pagamentos periódicos a partir do final do primeiro período. Ex: crediário com entrada.

$$\boxed{P = \frac{R}{(1+i)^0} + \frac{R}{(1+i)^1} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^{n-1}}}$$

Fórmulas da anuidade antecipada

- A seguinte relação é válida entre as anuidades postecipadas e antecipadas:

$$\boxed{P_{antecipada} = P_{postecipada}(1+i)}$$

- Dessa forma, temos:

$$\boxed{P = R\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}}}$$

Fórmulas da anuidade antecipada

- A prestação da anuidade antecipada é dada por:

$$\boxed{R = P\frac{i(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n}-1}}$$

- Já o montante final é dado por:

$$\boxed{S = R\frac{[(1+i)^{n}-1]}{i}(1+i)}$$

Anuidades diferidas

- Anuidades diferidas caracterizam-se pelo afastamento no tempo do início dos pagamentos.
- Existem k períodos de carência, sendo que a primeira prestação sempre vence no período $k+1$.
- Para $k=0$ temos uma anuidade postecipada; para $k=-1$ temos uma anuidade antecipada.

Fórmulas da anuidade diferida

- A prestação da anuidade diferida guarda a seguinte relação com a prestação da anuidade postecipada:

$$\boxed{R_{diferida} = R_{postecipada}(1+i)^k}$$

- Já o principal guarda a seguinte relação:

$$\boxed{P_{diferida} = \frac{P_{postecipada}}{(1+i)^k}}$$

Fórmulas da anuidade diferida

- A fórmula do principal da anuidade diferida é dada por:

$$\boxed{P = R\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n+k}}}$$

- Já a fórmula da prestação da anuidade diferida é:

$$\boxed{R = P\frac{i(1+i)^{n+k}}{(1+i)^n - 1}}$$

Fórmulas da anuidade diferida

- Por fim, o montante da anuidade diferida pode ser dado por:

$$\boxed{S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^k}}$$

Anuidade perpétua

- Podemos pensar no que acontece quando $n \to \infty$ na fórmula da anuidade postecipada.
- Assim, chegaremos a seguinte expressão para o principal de uma anuidade perpétua:

$$\boxed{P = \frac{R}{i}}$$