Métodos Estatísticos Básicos

Aula 9 - Valor esperado e variância

Regis A. Ely

Departamento de Economia
Universidade Federal de Pelotas

14 de junho de 2021

Conteúdo

Valor esperado

Variável aleatória discreta: $E(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$

Variável aleatória contínua: $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

Propriedades do valor esperado

1. $E(c) = c$
2. $E(cX) = cE(X)$
3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
4. $E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$
5. Se X e Y são independentes, então $E(XY) = E(X).E(Y)$

Variância

A variância de uma variável aleatória X, denotada $V(X)$ ou σ_x^2, é dada por:

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

A raiz quadrada de $V(X)$ é o desvio-padrão da variável aleatória X, denotado σ_x

Propriedades da variância

1. $V(X + c) = V(X)$
2. $V(cX) = c^2 V(X)$
3. Se X e Y foram independentes, então $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Desigualdade de Tchebycheff

- Se X for uma variável aleatória com $E(X) = \mu$ e $E(X - c)^2$ for finita, sendo c qualquer número real e ϵ qualquer número positivo, então:

$$P[|X - c| \geq \epsilon] \leq \tfrac{1}{\epsilon^2}E(X - c)^2$$

- Alternativamente, $P[|X - c| < \epsilon] \geq 1 - \frac{1}{\epsilon^2}E(X - c)^2$
- Se $c = \mu$, então $P[|X - \mu| \geq \epsilon] \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$
- Se $c = \mu$ e $E = K\sigma$, então $P[|X - \mu| \geq K\sigma] \leq K^{-2}$

Coeficiente de correlação

A correlação entre duas variáveis aleatórias X e Y é dada por:

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{Cov(XY)}{\sigma_x \sigma_y}$$

sendo $-1 \leq \rho \leq 1$

Valor esperado condicionado

Valor esperado condicional:

- Se X e Y são discretas: $E(X|Y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i|y_i)$
- Se X e Y são contínuas: $E(X|Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x|y)dx$

Propriedades:

1. $E[E(X|Y)] = E(X)$ e $E[E(Y|X)] = E(Y)$
2. $E[E(Y|X,Z)|X] = E[Y|X]$
3. Se X e Y são independentes, então $E(X|Y) = E(X)$ e $E(Y|X) = E(Y)$

Lei dos grandes números

Considere n repetições independentes de um experimento e seja n_A o número de vezes em que um envento A ocorre nessas n repetições. Façamos $f_A = n_A/n$ e seja $P(A) = p$, então, para qualquer número positivo ϵ, temos:

$$P[|f_A - p| \geq \epsilon] \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}, \text{ ou}$$

$$P[|f_A - p| < \epsilon] \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

- Com isso, definimos limites inferiores e superiores para a distância de f_A da real probabilidade p, de modo que quando n aumenta, f_A converge para p
- Este resultado decorre da desigualdade de Tchebycheff