Métodos Estatísticos Básicos

Aula 7 - Análise combinatória

Regis A. Ely

Departamento de Economia
Universidade Federal de Pelotas

17 de agosto de 2020

Conteúdo

Análise combinatória e probabilidade

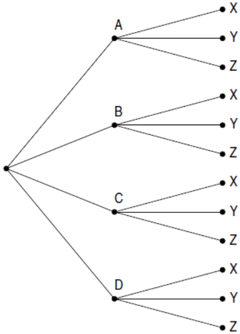
- Para calcular probabilidades utilizando a definição clássica, precisamos calcular o número de elementos no espaço amostral e em determinados eventos
    - Lembre que, para obtermos a probabilidade de o evento A ocorrer, precisamos dividir o número de elementos favoráveis ao evento A pelo número total de elementos do espaço amostral
- A definição clássica de probabilidade deve ser utilizada apenas quando os espaços amostrais são finitos e os resultados do experimento são igualmente verossímeis
- Veremos cinco principais técnicas de enumeração de conjuntos que nos auxiliam a utilizar a definição clássica de probabilidade

Regra da multiplicação

- **Quando se aplica a regra da multiplicação?** Se existirem k procedimentos independentes e o k-ésimo procedimento puder ser executado de n_i maneiras, então o número total de maneiras de se executar os k procedimentos é $n_1.n_2....n_k$
- É essencial que os procedimentos sejam independentes, ou seja, as maneiras de executar um procedimento i não impactam nas maneiras de executar outro procedimento j
- Os procedimentos podem ser interpretados como sendo sequenciais

Regra da multiplicação - Exemplo

Uma peça passa por 2 estações de controle. Na primeira, 4 classificações são possíveis (A, B, C, D). Na segunda estação, 3 classificações são possíveis (X, Y, Z). Existem 3.4=12 possíveis classificações para cada peça



Regra da adição

- **Quando se aplica a regra da adição?** Se existirem k procedimentos, que não podem ser realizados ao mesmo tempo, e o k-ésimo procedimento puder ser executado de n_i maneiras, então o número total de maneiras de se executar os k procedimentos é $n_1 + n_2 + ... + n_k$
- Os procedimentos podem ser interpretados como sendo estáticos, em apenas um período de tempo, dado que não ocorrem conjuntamente
- *Ex*: Se viajamos por ônibus ou trem, sendo que há 3 rodovias e 2 ferrovias, o número possível de caminhos é $3 + 2 = 5$

Permutação

- **Fatorial**: definimos $n! = (n).(n-1).(n-2).....1$ como o fatorial de n, sendo n um número inteiro positivo e $0! = 1$
- **Permutação**: o número de maneiras diferentes que podemos dispor n elementos sem repetição é $_nP_n = n!$
- Este procedimento pode ser interpretado como sequencial, mas agora as etapas não são independentes, pois a ocorrência de um resultado reduz o número de resultados possíveis da próxima realização, ou seja, o experimento é realizado sem reposição
- *Ex*: Se tivermos três letras (a, b, c), temos as seguintes permutações: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Logo, como $n = 3$, temos $_3P_3 = 3! = 6$

Permutação: Exemplo no R

```r
library(gtools)
x <- c("a", "b", "c")
permutations(n=3, r=3, v=x)
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,] "a"  "b"  "c" 
[2,] "a"  "c"  "b" 
[3,] "b"  "a"  "c" 
[4,] "b"  "c"  "a" 
[5,] "c"  "a"  "b" 
[6,] "c"  "b"  "a" 
```

Permutações com elementos repetidos

- Se temos n objetos, tais que n_1 sejam de uma mesma espécie, n_2 de outra e assim por diante, com $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, então o número de permutações possíveis desses n objetos é dado por $\frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$
- Se todos os objetos forem diferentes, ou seja $n_i = 1$ para $i = 1, 2, ..., k$, então temos o caso da permutação simples, ${}_nP_n = n!$

Arrajo

- **Arranjo**: se queremos permutar r objetos dentre n, com $0 \leq r \leq n$, então teremos $nAr = \frac{n!}{(n-r)!}$ maneiras de fazer isso
- Note que estamos calculando o número de permutação dos n objetos e descontando o número de permutações dos (n-r) objetos restantes, de modo a obter as permutações possíveis de n objetos ordenados r a r
- *Ex*: Se tivermos quatro letras (a, b, c, d), e queremos rearranjá-las de 2 em 2, temos os seguintes arranjos ${}_4A_2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = 12$

Arranjo: Exemplo no R

```r
x <- c("a", "b", "c", "d")
permutations(n=4, r=2, v=x)
```

```
      [,1] [,2]
 [1,] "a"  "b"
 [2,] "a"  "c"
 [3,] "a"  "d"
 [4,] "b"  "a"
 [5,] "b"  "c"
 [6,] "b"  "d"
 [7,] "c"  "a"
 [8,] "c"  "b"
 [9,] "c"  "d"
[10,] "d"  "a"
[11,] "d"  "b"
[12,] "d"  "c"
```

Combinação

- **Combinação**: se queremos escolher r objetos dentre n, com $0 \leq r \leq n$, sem nos importarmos com a ordem deles, então teremos $C = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$ maneiras de fazer isso
- A expressão $\binom{n}{r}$, para n inteiro positivo e r inteiro tal que $0 \leq r \leq n$, é denominada *coeficiente binomial*
- Note que uma vez que r objetos tenham sido escolhidos dentre n, existirão r maneiras de permutá-los entre si, por isso devemos dividir o arranjo por r

Exemplos de combinação

- *Ex*: se temos a, b, c e d, e $r = 2$, então desejamos contar ab, ac, ad, bc, bd, cd (não consideramos ba, ca, da, cb, db, dc). Ao todo são $C = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \binom{4}{2} = 6$ combinações
- *Ex*: Um grupo de 8 pessoas é formado por 5 homens e 3 mulheres. Quantas comissões de 3 pessoas, incluindo exatamente 2 homens podem ser constituídas? Podem ser constituídas $\binom{5}{2} . \binom{3}{1} = 30$ comissões

Combinação: Exemplo no R

No `R`, a função `choose` calcula o coeficiente binomial. Podemos calcular a probabilidade de ganhar na mega-sena escolhendo seis números entre 60:

```
choose(n=60, k=6)
```

```
[1] 50063860
```

Assim, a probabilidade de ganharmos ao jogar um jogo é 1 entre 50.063.860, ou 0.000001997449%

Propriedades do coeficiente binomial

- **Propriedade 1**: por definição, $\binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{1} = n$
- **Propriedade 2**: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- *Demonstração*: $\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r)!)} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

Propriedades do coeficiente binomial

- **Propriedade 3**: (Teorema de Pascal) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$
- *Demonstração*: se escolhermos r dentre n objetos, um objeto qualquer a_1 pode estar nesses r escolhidos, e então sobrará $\binom{n-1}{r-1}$ combinações; ou então o objeto a_1 pode não estar entre os r objetos escolhidos, sobrando $\binom{n-1}{r}$ combinações. Obrigatoriamente a_1 estará ou não nos r objetos, não podendo ocorrer ambas as coisas, de modo que podemos aplicar a regra da adição

Teorema binomial

- **Teorema binomial**: permite verificar como uma expressão da forma $(a+b)^n$ se desenvolve, de modo que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.a^k.b^{n-k}$
- *Ex*: $(a+b)^2 = \binom{2}{0}.a^0.b^{2-0} + \binom{2}{1}.a^1.b^{2-1} + \binom{2}{2}.a^2.b^{2-2} = 1.1.b^2 + 2.a.b + 1.a^2.1 = b^2 + 2ab + a^2$