Séries de Tempo

Aula 9 - Cointegração e Modelos VEC

Regis A. Ely

Departamento de Economia
Universidade Federal de Pelotas

14 de setembro de 2020

Conteúdo

Regressão espúria

Ao fazermos uma regressão entre duas séries de tempo, $Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t$, podemos ter:

1. $Y_t, X_t \sim I(0)$ **e não autocorrelacionados**: regressão tem coeficientes não viesados e modelo está bem especificado
2. $Y_t, X_t \sim I(0)$ **e autocorrelacionados**: resíduos terão correlação serial, OLS não será eficiente e endogeneidade é possível
3. $Y_t, X_t \sim I(1)$: a regressão será espúria, a não ser que exista um β que gere resíduos $\varepsilon_t = Y_t - \beta X_t \sim I(0)$, e nesse caso, dizemos que Y_t e X_t são cointegrados, os coeficientes não serão viesados mas os erros não são confiáveis

Modelo VEC

Um modelo VEC(p) bivariado com um vetor de cointegração $\beta = (1, -\beta_2)'$ tal que $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{Y_t} = y_{1t} - \beta_2 y_{2t}$ é $I(0)$ é dado por:

$$\Delta y_{1t} = c_1 + \alpha_1(y_{1t-1} - \beta_2 y_{2t-1}) + \sum_{j=1}^{p} \psi_{11}^{j} \Delta y_{1t-j} + \sum_{j=1}^{p} \psi_{12}^{j} \Delta y_{2t-j} + \varepsilon_{1t}$$
$$\Delta y_{2t} = c_2 + \alpha_2(y_{1t-1} - \beta_2 y_{2t-1}) + \sum_{j=1}^{p} \psi_{21}^{j} \Delta y_{1t-j} + \sum_{j=1}^{p} \psi_{22}^{j} \Delta y_{2t-j} + \varepsilon_{2t}$$

- A relação de longo prazo entre as variáveis é dada pelo vetor de cointegração $\boldsymbol{\beta}$[1]
- A relação de curto prazo entre as variáveis é dada pelos coeficientes ψ
- A rapidez com que o modelo corrige o equilíbrio de longo prazo é dada pelos coeficientes α

[1] Este vetor não é único, uma vez que $\lambda\boldsymbol{\beta}$ também é um vetor de cointegração, para qualquer $\lambda > 0$.

Testes de cointegração

- Há dois testes de cointegração mais usuais: o teste de Engle e Granger e o teste de Johansen
- O teste de Engle e Granger se aplica apenas para modelos bivariados
- O teste de Johansen é mais geral e equivale a uma extensão multivariada do teste de Dickey-Fuller
- Em ambos os testes é necessário especificar os termos determinísticos (intercepto restrito e não restrito, tendências restritas e não restritas)

Teste de Engle e Granger

O teste de Engle e Granger consiste em duas etapas:

1. Forme os resíduos de cointegração ($v_t = \beta' Y_t$);
2. Faça um teste de raízes unitárias para determinar se esses resíduos são $I(0)$

Temos então as hipóteses:

- H0: $v_t \sim I(1)$: não há cointegração
- H1: $v_t \sim I(0)$: há cointegração

Teste de Engle e Granger

- Poderíamos usar um teste ADF ou PP para testar H0 contra H1, entretanto, em geral, o vetor de cointegração não é conhecido, o que faz com que estes testes tenham distribuições distintas
- A alternativa é estimar um vetor de cointegração $y_{1t} = \alpha + \beta y_{2t} + \upsilon_t$ para obter os resíduos estimados $\hat{\upsilon}_t$ e então testar H0 contra H1
- Nesse caso, o teste ADF não é apropriado e temos uma outra distribuição para testar H0 contra H1 (Phillips e Ouliaris, 1990)

Teste de Johansen

- Quando temos mais de duas variáveis em um modelo vetorial, podemos ter mais de um vetor de cointegração e o teste de Engle Granger não será aplicável
- Podemos escrever um modelo VEC(p) da seguinte forma:

$$\Delta \mathbf{Y_t} = \Phi_0 \mathbf{D_t} + \Pi \mathbf{Y_{t-p}} + \Gamma_1 \Delta \mathbf{Y_{t-1}} + \ldots + \Gamma_{p-1} \Delta \mathbf{Y_{t-p+1}} + \upsilon_t$$

onde $\Gamma_i = \Phi_1 + \ldots + \Phi_p - I_n$, sendo Φ_k a matriz dos coeficientes do modelo VAR, e $\mathbf{D_t}$ uma expressão que contém componentes determinísticos (interceptos e tendências)

Teste de Johansen

- Se as séries são cointegradas, a matriz Π deve ter pelo menos duas colunas linearmente independentes entre si
- O número de colunas linearmente independentes desta matriz é equivalente ao posto dela e o corresponde ao número de vetores de cointegração[2]
- O teste de Johansen determina se as séries são cointegradas observando o posto ou os autovalores da matriz Π
- Se o posto for zero ou se todos os autovalores forem nulos, então a matriz não possui nenhuma coluna linearmente independente e portanto as séries não são cointegradas[3]

[2] Se tivermos *n* colunas linearmente independentes, então as séries devem ser I(0), e devemos estimar um modelo VAR.

[3] Problema da regressão espúria se séries são I(1).

Teste de Johansen

Assim, existem dois testes de Johansen, o teste do traço e o teste do máximo autovalor:

$$J_{traço}(r_0) = -T \sum_{i=r_0+1}^{n} \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$$
$$J_{max}(r_0) = -T \ln(1 - \hat{\lambda}_{r_0+1})$$

O teste de hipótese de $J_{traço}$ corresponde a:

$H0 : r \leq r_0$ (menos do que $r_0 + 1$ vetores de cointegração)
$H1 : r > r_0$ (mais do que r_0 vetores de cointegração)

O teste de hipótese de J_{max} corresponde a:

$H0 : r = r_0$ (exatamente r vetores de cointegração)
$H1 : r = r_0 + 1$ (exatamente $r_0 + 1$ vetores de cointegração)

Exemplo no R

Vamos utilizar os dados do artigo de Johansen e Juselius (1990) sobre a economia da Dinamarca

```
library(urca)
library(vars)
library(tsDyn)
data(denmark)
base <- denmark[,c(2, 3, 5, 6)]
```

As variáveis endógenas do nosso modelo serão:

- **LRM**: Logaritmo da oferta de moeda (M2)
- **LRY**: Logaritmo da renda em termos reais
- **IBO**: Taxa de juros dos títulos do governo
- **IDE**: Taxa de juros dos depósitos bancários

Estacionariedade

Primeiro vamos realizar o teste ADF nas 4 variáveis para identificar se elas são I(1):

```
adf <- lapply(
  base, ur.df, type = "drift",
  lags = 10, selectlags = "AIC"
)
lapply(adf, function(x) x@teststat)
adf[[1]]@cval
```

A função `lapply` aplica o teste ADF para cada uma das colunas da base de dados, retornando uma lista com 4 elementos

Estacionariedade

```
## $LRM
##                tau2      phi1
## statistic -0.9553938 0.5511474
##
## $LRY
##                tau2      phi1
## statistic -0.8258909 0.7077475
##
## $IBO
##               tau2      phi1
## statistic -1.145988 0.7747436
##
## $IDE
##               tau2     phi1
## statistic -2.222142 2.473651
```

```
##       1pct  5pct 10pct
## tau2 -3.51 -2.89 -2.58
## phi1  6.70  4.71  3.86
```

Estacionariedade

- Os resultados demonstram que não podemos rejeitar a hipótese de raiz unitária para todas as variáveis
- Assim, as séries são no mínimo I(1)
- Para garantirmos que as séries são I(1) devemos fazer o teste ADF nas séries diferenciadas e então rejeitarmos a hipótese de raíz unitária

Identificação

Após garantir que as séries são I(1), devemos fazer a etapa de identificação:

```
VARselect(base, lag.max = 4, type = "both", season = 4)
```

```
## $selection
## AIC(n)  HQ(n)  SC(n) FPE(n)
##      2      1      1      2
##
## $criteria
##                    1             2             3             4
## AIC(n) -3.505839e+01 -3.514551e+01 -3.504072e+01 -3.495610e+01
## HQ(n)  -3.453730e+01 -3.439283e+01 -3.405645e+01 -3.374023e+01
## SC(n)  -3.369475e+01 -3.317581e+01 -3.246495e+01 -3.177427e+01
## FPE(n)  6.036993e-16  5.707737e-16  6.729906e-16  8.109343e-16
```

Teste de cointegração

Antes de estimar um modelo VAR(2) nas diferenças, devemos verificar se as séries são cointegradas através da função `ca.jo`

```
jo_eigen <- ca.jo(
  base, type = "eigen", ecdet = "const",
  K = 2, spec = "longrun", season = 4
)
summary(jo_eigen)
```

Vamos primeiro estimar o teste dos autovalores, utilizando 2 defasagens, uma constante e um ajuste sazonal

Teste de cointegração

```
...
##
## ######################
## # Johansen-Procedure #
## ######################
##
## Test type: maximal eigenvalue statistic (lambda max) , without linear trend and cons
##
## Eigenvalues (lambda):
## [1] 4.331654e-01 1.775836e-01 1.127905e-01 4.341130e-02 6.927550e-16
##
## Values of teststatistic and critical values of test:
##
##           test 10pct  5pct  1pct
## r <= 3 |  2.35  7.52  9.24 12.97
## r <= 2 |  6.34 13.75 15.67 20.20
## r <= 1 | 10.36 19.77 22.00 26.81
## r = 0  | 30.09 25.56 28.14 33.24
...
```

Teste de cointegração

O teste do autovalor indica um vetor de cointegração. Agora vamos realizar o teste do traço para verificar se este resultado permanece:

```
jo_trace <- ca.jo(
  base, type = "trace", ecdet = "const",
  K = 2, spec = "longrun", season = 4
)
summary(jo_trace)
```

Novamente adicionamos duas defasagens, ajustes sazonais e uma constante, mas agora utilizamos o argumento `type = "trace"`

Teste de cointegração

```
...
##
## ######################
## # Johansen-Procedure #
## ######################
##
## Test type: trace statistic , without linear trend and constant in cointegration
##
## Eigenvalues (lambda):
## [1] 4.331654e-01 1.775836e-01 1.127905e-01 4.341130e-02 6.927550e-16
##
## Values of teststatistic and critical values of test:
##
##           test 10pct  5pct  1pct
## r <= 3 |  2.35  7.52  9.24 12.97
## r <= 2 |  8.69 17.85 19.96 24.60
## r <= 1 | 19.06 32.00 34.91 41.07
## r = 0  | 49.14 49.65 53.12 60.16
...
```

Estimação

O teste do traço não rejeita a hipótese nula de que há zero vetores de cointegração, mas utilizaremos o resultado obtido no teste do autovalor nestes exemplo, estimando o modelo através da função `VECM`:

```
vecm <- VECM(base, lag = 2, r = 1, estim = "ML")
summary(vecm)
```

Utilizamos duas defasagens, um vetor de cointegração e realizamos a estimação por máxima verossimilhança

Estimação

```
...
## Cointegrating vector (estimated by ML):
##    LRM       LRY      IBO       IDE
## r1   1 -1.013097 4.982986 -3.990572
##
##
##              ECT                Intercept          LRM -1
## Equation LRM -0.3249(0.1076)**   2.0041(0.6621)**    -0.1537(0.1493)
## Equation LRY 0.0760(0.0983)      -0.4652(0.6045)     0.2407(0.1363).
## Equation IBO -0.0134(0.0361)     0.0816(0.2221)      0.0119(0.0501)
## Equation IDE 0.0266(0.0240)      -0.1636(0.1480)     0.0311(0.0334)
##              LRY -1              IBO -1              IDE -1
## Equation LRM -0.1627(0.1874)     0.1842(0.6125)      -1.8811(0.7223)*
## Equation LRY -0.0943(0.1711)     -0.0905(0.5592)     -0.5220(0.6594)
## Equation IBO 0.1385(0.0629)*     0.5463(0.2054)*     0.0428(0.2422)
## Equation IDE 0.0049(0.0419)      0.3248(0.1369)*     0.1431(0.1614)
##              LRM -2              LRY -2              IBO -2
## Equation LRM 0.2948(0.1628).     0.0023(0.1859)      0.9167(0.5551)
## Equation LRY 0.0471(0.1487)      -0.0435(0.1697)     -0.3060(0.5068)
## Equation IBO -0.0116(0.0546)     -0.0485(0.0623)     -0.0452(0.1862)
## Equation IDE 0.0399(0.0364)      -0.0286(0.0415)     0.0085(0.1240)
##              IDE -2
## Equation LRM -0.7905(0.6368)
## Equation LRY -0.4685(0.5814)
## Equation IBO -0.0764(0.2136)
## Equation IDE -0.0635(0.1423)
...
```

Diagnóstico

Por fim, realizamos o diagnóstico dos resíduos com a função `serial.test`, mas antes transformamos o resultado do teste de Johansen no formato VAR utilizando a função `vec2var`:

```
vecvar <- vec2var(jo_eigen, r = 1)
serial.test(vecvar, lags.pt = 15)
```

```
##
##  Portmanteau Test (asymptotic)
##
## data:  Residuals of VAR object vecvar
## Chi-squared = 188.46, df = 212, p-value = 0.8762
```

Função impulso-resposta

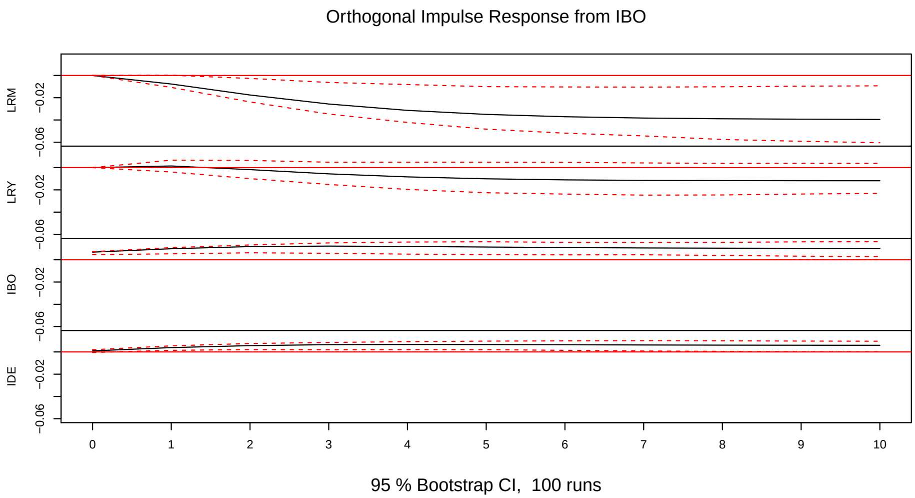
Após garantirmos que o modelo está bem especificado, podemos utilzar a função `irf` para fazermos as simulações de impulso-resposta:

```
impulse_IBO <- irf(vecvar, impulse = "IBO")
impulse_LRM <- irf(vecvar, impulse = "LRM")
impulse_LRY <- irf(vecvar, impulse = "LRY")
```

Vamos simular um impulso nas variáveis `IBO`, `LRM` e `LRY`

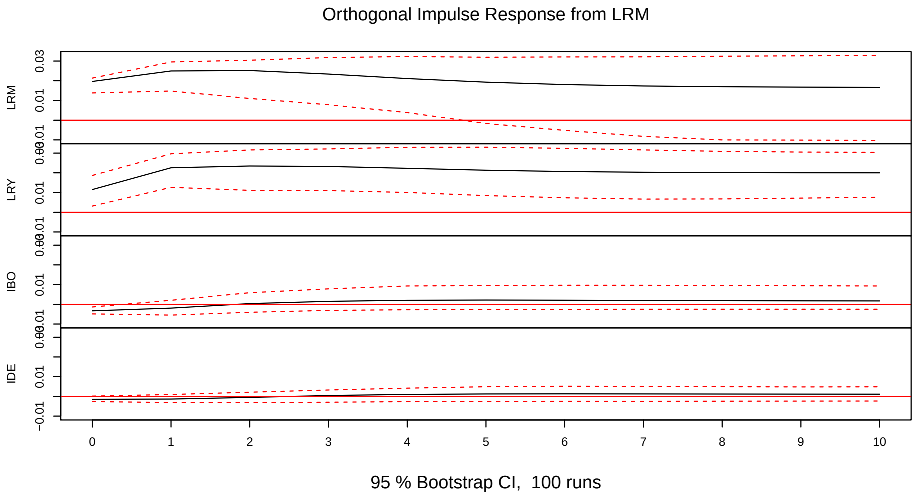
Função impulso-resposta

```r
plot(impulse_IBO)
```



Função impulso-resposta

```
plot(impulse_LRM)
```



Função impulso-resposta

```
plot(impulse_LRY)
```