Séries de Tempo

Aula 3 - Processo lineares estacionários

Regis A. Ely

Departamento de Economia
Universidade Federal de Pelotas

24 de julho de 2020

Conteúdo

Processos lineares estacionários

Um *processo linear estacionário* é descrito por[1]:

$$Y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

- Sendo $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, ε_t um ruído branco com média zero e variância σ^2, e μ o valor esperado do processo estocástico
- **Valor esperado**: $E(Y_t) = \mu$
- **Variância**: $\gamma_0 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$
- **Autocovariância**: $\gamma_j = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_\tau \psi_{j+\tau}$
- **Autocorrelação**: $\rho_\tau = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_\tau \psi_{j+\tau}}{1+\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2}$

[1] O teorema da decomposição de Wold nos diz que todo processo estacionário em covariância pode ser descrito como um processo linear.

Processos lineares estacionários

- Em um processo linear estacionário, $\psi_j \to 0$ quando $i \to \infty$
  - Assim, as autocovariâncias (γ_j), assim como as autocorrelações, irão convergir para zero quando a defasagem τ aumenta
- Dizemos que um *processo linear estacionário* é não persistente no tempo, pois possui choques aleatórios que perdem importância conforme o tempo passa
- Um processo estocástico persistente, em que choques que ocorreram em um passado distante influenciam o valor presente, não é estacionário, uma vez que os choques são permanentes

Processos lineares estacionários

Os processos lineares estacionários mais comuns são:

- **Modelos auto-regressivos (AR)**: valor de Y_t depende de seus valores passados
- **Modelos de médias móveis (MA)**: valor de Y_t depende dos choques aleatórios passados
- **Modelos auto-regressivos e de médias móveis (ARMA)**: valor de Y_t depende tanto de seus valores passados como dos valores dos choques aleatórios passados

Modelo AR(1)

Um modelo AR(1) é descrito por:

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ ou}$$
$$(Y_t - \mu) = \phi(Y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$$

Este processo só será estacionário se $|\phi| < 1$

- **Valor esperado**: $E(Y_t) = \mu = \frac{c}{1-\phi}$
- **Variância**: $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$
- **Autocovariância**: $\gamma_j = \phi\gamma_{j-1} = \phi^j \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$
- **Autocorrelação**: $\rho_j = \phi\rho_{j-1} = \phi^j$

Modelo AR(p)

Um modelo AR(p) é descrito por:

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \text{ ou}$$
$$(Y_t - \mu) = \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \ldots + \phi_p(Y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t$$

- **Valor esperado**: $E(Y_t) = \mu = \frac{c}{1-\phi_1-\ldots-\phi_p}$
- **Variância**: $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2-\ldots-\phi_p^2}$
- **Autocovariância**: $\gamma_j = \phi_1\gamma_{j-1} + \ldots + \phi_p\gamma_{j-p}$
- **Autocorrelação**: $\rho_j = \phi_1\rho_{j-1} + \ldots + \phi_p\rho_{j-p}$

Estacionariedade do modelo AR(p)

- Devemos impor condições sobre $\phi_1, \dots, \phi_p$ para que o processo seja estacionário
- Um processo AR(p) será estacionário se respeitar uma das duas condições abaixo
  1. As raízes da equação $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0$ forem todas maiores do que um
  2. As raízes da equação $\lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \dots - \phi_{p-1}\lambda - \phi_p = 0$ forem todas menores do que um[2]

[2] Chamamos esta equação de equação característica.

Autocorrelação parcial

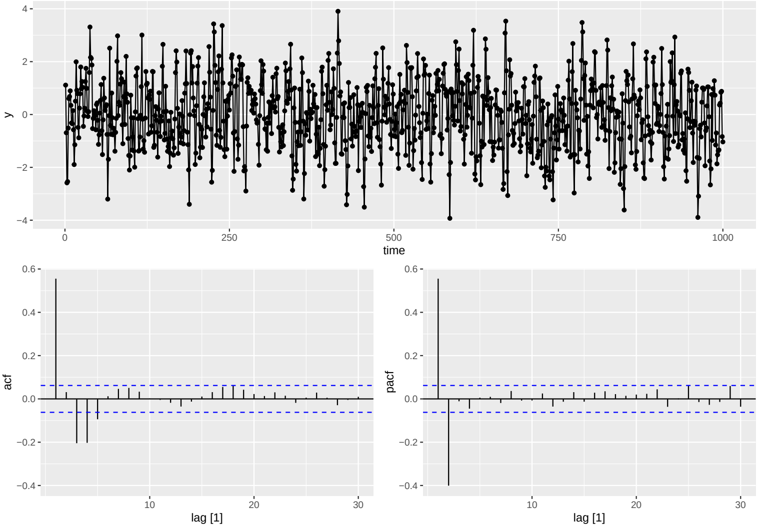
- A função de autocorrelação parcial (facp) nos ajuda a identificar a ordem de processos ARMA
- A facp de ordem k mede a correlação remanescente entre Y_t e Y_{t-k} depois de eliminada a influência de $Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-k-1}$
- Para calcular a facp, podemos estimar, sucessivamente, modelos auto-regressivos com ordens $p = 1, 2, 3, ...$ e tomar as estimativas do último coeficiente de cada ordem
- *Exemplo*: a facp de segunda ordem de uma série de tempo Y_t será o coeficiente $\hat{\phi}_2$, estimado através da regressão $Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

Simulação de modelo AR

Vamos simular um AR(2) no `R` através da função `arima.sim`. Para isso, vamos definir a variável como um `tsibble` e plotar o gráfico da série e suas autocorrelações:

```
library(tsibble)
library(feasts)
set.seed(4321)
ar_sim <- tsibble(
  time = 1:1000,
  y = arima.sim(list(ar = c(0.8, -0.4)), n = 1000),
  index = time
)
gg_tsdisplay(ar_sim, y, plot_type = "partial")
```

Simulação de modelo AR



Identificação de modelo AR

Conforme vimos, um processo AR(p) deve ter funções de autocorrelação (fac) e autocorrelação parcial (facp) que se comportam da seguinte maneira

- **FAC**: decai exponencialmente ou com senóides amortecidas
- **FACP**: valor diferente de zero para $k \leq p$ e zero para $k > p$

Modelo MA(1)

Um modelo MA(1) é descrito por:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Um processo MA(1) será sempre estacionário

- **Valor esperado**: $E(Y_t) = \mu$
- **Variância**: $\gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta_1^2)$
- **Autocovariância**: $\gamma_1 = \theta_1 \sigma_2$ e $\gamma_j = 0$ para $j > 1$
- **Autocorrelação**: $\rho_1 = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$ e $\rho_j = 0$ para $j > 1$

Modelo MA(q)

Um modelo MA(q) é descrito por:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Um processo MA(q) será sempre estacionário

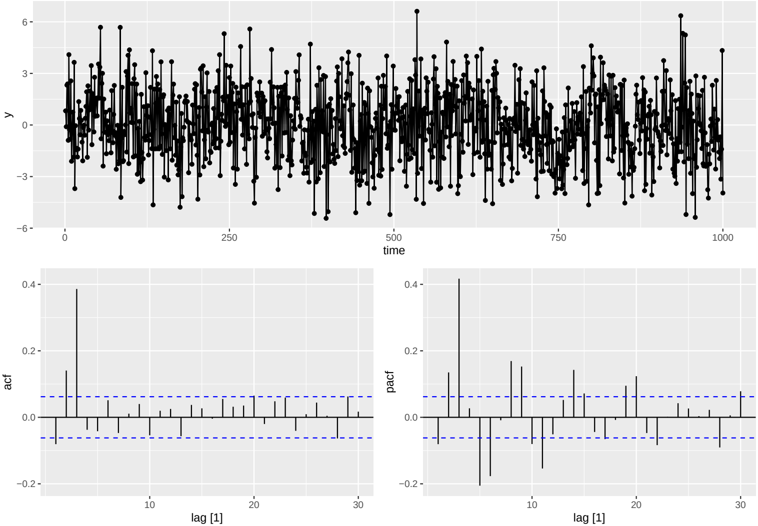
- **Valor esperado**: $E(Y_t) = \mu$
- **Variância**: $\gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2)$
- **Autocovariância**: $\gamma_j = (\theta_j + \theta_{j+1}\theta_1 + \ldots + \theta_q \theta_{q-j})\sigma^2$ para $j = 1, 2, ..., q$ e $\gamma_j = 0$ para $j > q$
- **Autocorrelação**: $\rho_j = \gamma_j / \gamma_0$

Simulação de modelo MA

Vamos simular um MA(3) no `R`:

```
set.seed(4321)
ma_sim <- tsibble(
  time = 1:1000,
  y = arima.sim(list(ma = c(0.8, -0.4, 1.6)), n = 1000),
  index = time
)
gg_tsdisplay(ma_sim, y, plot_type = "partial")
```

Simulação de modelo MA



Identificação de modelo MA

Conforme vimos, um processo MA(q) deve ter funções de autocorrelação (fac) e autocorrelação parcial (facp) que se comportam da seguinte maneira

- **FAC**: valor diferente de zero para $k \leq q$ e zero para $k > q$
- **FACP**: decai exponencialmente ou com senóides amortecidas

Modelo ARMA(1,1)

Um modelo ARMA(1,1) é descrito por:

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \text{ ou}$$
$$(Y_t - \mu) = \phi_1 (Y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Este processo só será estacionário se $|\phi_1| < 1$

- **Valor esperado**: $E(Y_t) = \mu = \frac{c}{(1-\phi_1)}$
- **Variância**: $\gamma_0 = \frac{(1+2\phi_1\theta_1+\theta_1^2)\sigma^2}{1-\phi_1^2}$
- **Autocovariância**: $\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 + \theta_1\sigma^2$ e $\gamma_j = \phi_1\gamma_{j-1}$ para $j > 1$
- **Autocorrelação**: $\rho_1 = \phi_1 + \frac{\theta_1\sigma^2}{\gamma_0}$ e $\rho_j = \phi_1\rho_{j-1}$ para $j > 1$

Modelo ARMA(p,q)

Um modelo ARMA(p,q) é descrito por:

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \text{ ou}$$
$$(Y_t - \mu) = \phi_1 (Y_{t-1} - \mu) + \ldots + \phi_p (Y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

A estacionariedade de um processo ARMA(p,q) dependerá apenas dos coeficientes da parte auto-regressiva

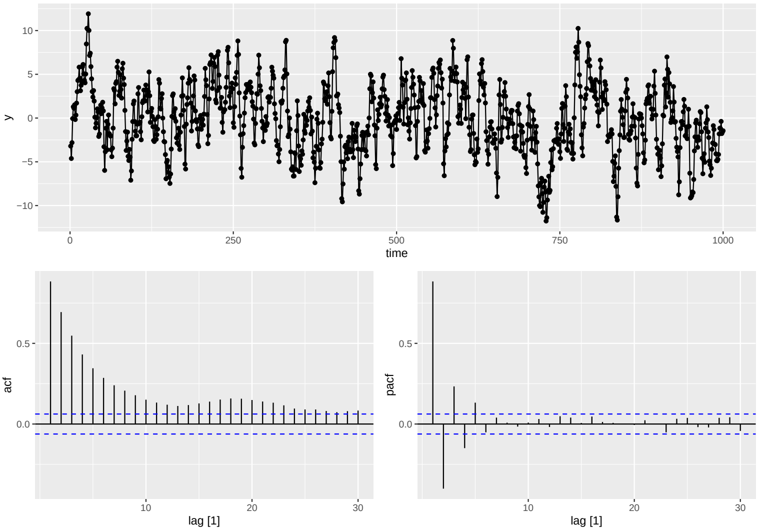
- **Valor esperado**: $E(Y_t) = \mu = \frac{c}{(1-\phi_1-\ldots-\phi_p)}$
- **Variância e Autocovariância**: $\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \ldots + \phi_p \gamma_{j-p}$ para $j > q$ e para $j < q$?
- **Autocorrelação**: $\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \ldots + \phi_p \rho_{j-p}$ para $j > q$ e para $j < q$?

Simulação de modelo ARMA

Vamos simular um ARMA(1,1) no R:

```
set.seed(4321)
arma_sim <- tsibble(
  time = 1:1000,
  y = arima.sim(list(ar = 0.8, ma = 1.6), n = 1000),
  index = time
)
gg_tsdisplay(arma_sim, y, plot_type = "partial")
```

Simulação de modelo ARMA



Identificação de modelo ARMA

Conforme vimos, um processo ARMA(p) deve ter funções de autocorrelação (fac) e autocorrelação parcial (facp) que se comportam da seguinte maneira

- **FAC**: decai exponencialmente ou com senóides amortecidas após o lag q
- **FACP**: decai exponencialmente ou com senóides amortecidas após o lag p

Outros critérios de identificação

- Podemos utilizar critérios para definir a ordem das defasagens de um modelo ARMA
- Em geral, os critérios envolvem, por um lado, a minimização da variância residual obtida após a estimação do modelo ARMA(k,l), e, por outro lado, a penalização do acréscimo de novos parâmetros no modelo
- Deve-se escolher as ordens k e l que minimizam uma função como

$$\rho(k,l) = \ln \hat{\sigma^2_{k,l}} + (k+l)\frac{C(T)}{T}$$

- Onde $\hat{\sigma^2_{k,l}}$ é a estimativa da variância residual, e $C(T)$ é uma função do tamanho da série de tempo, T

Outros critérios de identificação

Entre os critérios de identificação mais utilizados estão[3]:

- **Akaike**: $AIC(k,l) = \ln \hat{\sigma^2_{k,l}} + \frac{2(k+l)}{T}$

- **Akaike Corrigido**: $AICc = AIC + \frac{2k^2+2k}{T-k-1}$

- **Bayesiano**: $BIC(k,l) = \ln \sigma^2_{k,l} + (k+l)\frac{\ln T}{T}$

- **Hannan-Quinn**: $HQC(k,l) = n\ln(\sigma^2_{k,l}) + 2k\ln(\ln(T))$

[3]Devemos utilizar os parâmetros k e l que minimizam estas funções

Operador de lag

- O operador de lag transforma um valor presente em um valor passado: $L^2 y_t = y_{t-2}$
  - Este operador é útil para fazermos operações algébricas
- Podemos escrever um AR(p) como $(1 - \phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p) Y_t = c + \varepsilon_t$
- Da mesma forma, um MA(q) é descrito por $(Y_t - \mu) = (1 + \theta_1 L + \ldots + \theta_q L^q)\varepsilon_t$
- Por fim, um ARMA(p,q) corresponde a $(1 - \phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p) Y_t = c + (1 + \theta_1 L + \ldots + \theta_q L^q)\varepsilon_t$

Invertibilidade

- Dado um processo MA(1), $Y_t - \mu = (1 + \theta L)\varepsilon_t$, se $|\theta| < 1$, podemos inverter o operador $(1 + \theta L)$ e passá-lo para o lado esquerdo da equação
- Note que $(1 + \theta L)^{-1} = [1 - (-\theta)L]^{-1} = 1 + (-\theta L) + (-\theta L)^2 + \ldots$[4]
- Assim, uma processo MA(1) pode ser descrito como $(1 - \theta L + \theta^2 L^2 - \ldots)(Y_t - \mu) = \varepsilon_t$, que corresponde a um AR(∞)
- Neste caso, dizemos que o processo MA(1) é invertível[5], sendo que isto ocorre se e somente se $|\theta| < 1$

---

[4] Razão de uma progressão geométrica

[5] O conceito também se estende para processos MA(q), sendo que as raízes da equação característica devem ser todas menores que um.

Invertibilidade

- Um processo MA(q) invertível pode ser descrito como um AR(∞)
- De forma semelhante, um processo AR(p) estacionário pode ser descrito como um MA(∞)
- Este último resultado sai do teorema de decomposição de Wold, que nos diz que todo processo linear estacionário pode ser descrito como uma soma de choques aleatórios multiplicados por coeficientes
  - O primeiro slide desta aula abordou este resultado