Métodos Estatísticos Básicos

Aula 6 - Probabilidade condicional e independência

Regis A. Ely

Departamento de Economia
Universidade Federal de Pelotas

13 de agosto de 2020

Conteúdo

Probabilidade condicional

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade. Se $B \in \mathcal{A}$ e $P(B) > 0$, a **probabilidade condicional** de um evento $A \in \mathcal{A}$ dado que o evento B ocorre, é definida por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Se $P(B) = 0$, então $P(A|B)$ pode ser arbitrariamente definida, como $P(A|B) = 0$ ou $P(A|B) = P(A)$

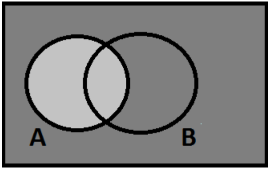
Probabilidade condicional

Podemos reescrever a fórmula da probabilidade condicional em termos de probabilidade frequentista:

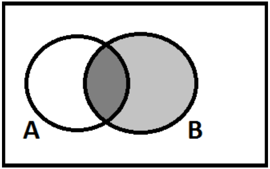
$$P(A|B) = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{nº de ocorrências de } A \cap B \text{ em n ensaios}}{\text{nº de ocorrências de B nos mesmos n ensaios}}$$

- Note que ao calcularmos $P(A|B)$, estamos calculando $P(A)$ em relação ao espaço amostral reduzido B

Probabilidade condicional



$$P(A) = \frac{\text{Área de A}}{\text{Área de } \Omega}$$



$$P(A|B) = \frac{\text{Área de } A \cap B}{\text{Área de B}}$$

Probabilidade condicional

Podemos calcular a probabilidade condicional, $P(A|B)$, de duas maneiras:

1. Empregando a fórmula da probabilidade condicional, onde $P(A \cap B)$ e P(B) são calculados em relação ao espaço amostral original Ω, ou
2. Calculando diretamente a probabilidade de A em relação ao espaço amostral reduzido B

Exemplo de probabilidade condicional

Considere o experimento de lançar dois dados justos e observar os resultados. Nesse caso, temos:

$$\Omega = \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,6) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (6,1) & (6,2 & \dots & (6,6) \end{matrix}, \text{ com 36 resultados possíveis.}$$

Agora considere os eventos:
$A = \{(x_1,x_2)|\ x_1 + x_2 = 10\}$, e
$B = \{(x_1,x_2)|\ x_1 > x_2\}$

Calcule $P(A|B)$ e $P(B|A)$.

Exemplo: lançamento de dois dados

A primeira etapa é achar os resultados favoráveis aos eventos A e B:

$A = \{(5,5),(4,6),(6,4)\}$, e

$B = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),$
$(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$

Podemos aplicar a definição clássica de probabilidade para calcular $P(A) = \frac{3}{36}$ e $P(B) = \frac{15}{36}$.

- Como $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$, aplicando a fórmula da probabilidade condicional:
  - $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/36}{15/36} = 1/15$, e
  - $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/36}{3/36} = \frac{1}{3}$

Exemplo: lançamento de dois dados

Alternativamente, podemos calcular $P(A|B)$ e $P(B|A)$ pensando na redução do espaço amostral de Ω para B e A, respectivamente:

- Há apenas 1 resultado favorável à A no espaço amostral reduzido B, que contém 15 elementos. Assim, $P(A|B) = \frac{1}{15}$.
- De maneira semelhante, há apenas 1 elemento favorável à B no espaço amostral reduzido A, que contém 3 elementos. Assim, $P(B|A) = \frac{1}{3}$.

Partição do espaço amostral

- Dizemos que os eventos $B_1, B_2, ..., B_k$ representam uma *partição do espaço amostral*, Ω, quando:
  1. $B_i \cap B_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$
  2. $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$
  3. $P(B_i) > 0$ para todo i
- Assim, quando o experimento E é realizado, um, e somente um dos eventos B_i ocorre

Ex: Ao jogar um dado e observar os resultados, os eventos $B_1 = \{1, 2\}$, $B_2 = \{3, 4, 5\}$ e $B_3 = \{6\}$ formam uma partição do espaço amostral, enquanto $C_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C_2 = \{4, 5, 6\}$ não formam.

Teorema da probabilidade total

- Se os eventos $B_1, B_2, ..., B_k$ formam uma partição do espaço amostral Ω, então podemos escrever qualquer evento $A \subseteq \Omega$ como $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \cup (A \cap B_k)$
- Como os eventos dessas uniões são mutuamente excludentes, então $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_k)$.
- Utilizando a fórmula da probabilidade condicional, obtemos o **teorema da probabilidade total**:

$$P(A) = P(A/B_1).P(B_1) + P(A/B_2).P(B_2) + ... + P(A/B_k).P(B_k)$$

Exemplo: peças defeituosas

Considere o experimento de retirar duas peças de um lote de 100 peças que contém 80 não-defeituosas e 20 defeituosas. Nesse caso, temos:

$\Omega = \{(N, N), (N, D), (D, N), (D, D)\}$

Agora considere os eventos:
$A = \{$primeira peça é defeituosa$\}$, e
$B = \{$segunda peça é defeituosa$\}$

Calcule $P(B)$ com e sem reposição da primeira peça.

Exemplo: peças defeituosas

Se extrairmos com reposição:

$$P(B) = P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

Se extrairmos sem repor a primeira peça:

$$P(B|A) = \frac{19}{99}$$

$$P(B|\bar{A}) = \frac{20}{99}$$

Assim, $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{1}{5}.\frac{19}{99} + \frac{4}{5}.\frac{20}{99} = \frac{1}{5}$

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes: se $B_1, B_2, ..., B_k$ formam uma partição do espaço amostral Ω, então

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i).P(B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A/B_i).P(B_i)}$$

- Este resultado é a extensão da fórmula da probabilidade condicional, uma vez que $P(A \cap B_i) = P(A/B_i).P(B_i)$ e $P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A/B_i).P(B_i)$

Exemplo: problema de Monty Hall

Problema de Monty-Hall: há 3 portas e apenas um prêmio. Você escolhe uma porta, o apresentador revela uma delas após você escolher e então pede se você quer trocar de porta. *A troca é vantajosa?*

Para responder a pergunta, considere, sem perda de generalidade, que você escolha a porta 1 e defina os seguintes eventos:

$A_i = \{\text{prêmio está na porta i}\}$, e
$O = \{\text{apresentador revela porta 2}\}$

Logo, $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$

Exemplo: problema de Monty Hall

Mas, dado que o apresentador revelou a porta 2, você deve continuar com a porta 1 ou trocar para a porta 3?

Para responder, devemos comparar $P(A_1|O)$ com $P(A_3|O)$:

$$P(A_1|O) = \frac{P(O|A_1)P(A_1)}{P(O|A_1)P(A_1) + P(O|A_2)P(A_2) + P(O|A_3)P(A_3)}$$

$$P(A_3|O) = \frac{P(O|A_3)P(A_3)}{P(O|A_1)P(A_1) + P(O|A_2)P(A_2) + P(O|A_3)P(A_3)}$$

Exemplo: problema de Monty Hall

Logo, teremos:

$$P(A_1|O) = \frac{1/2.1/3}{1/2.1/3 + 0 + 1.1/3} = \frac{1}{3}$$
$$P(A_3|O) = \frac{P(O|A_3)P(A_3)}{P(O)} = \frac{1.1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

Assim, **o correto é sempre trocar de porta**

- Isso acontece porque a escolha da porta que o apresentador revela não é aleatória, uma vez que ele não pode revelar a porta com o prêmio

Independência

Independência: dado o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, os eventos aleatórios A e B são independentes se, e somente se $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

- A independência entre A e B também equivale à $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$, porque $P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = P(A).P(B)$
- Se $P(A) = 0$, então $P(A \cap B) = 0$, e A e B são independentes $\forall B \in \mathcal{A}$
- Se $P(B) = 1$, então $P(A \cap B) = P(A)$, logo A e B são independentes $\forall A \in \mathcal{A}$

Propriedades da independência

Proposição 1: O evento A é independente de si mesmo se, e somente se, $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$

- *Demonstração*: $P(A) = P(A \cap A) = P(A).P(A) \Leftrightarrow P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$

Proposição 2: Se A e B são eventos independentes, então A e $\bar{B}$ também são (bem como $\bar{A}$ e B, e $\bar{A}$ e $\bar{B}$)

- *Demonstração*: Sejam A e B eventos independentes. Como $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, então $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$, de modo que $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A).P(B)$ pela independência. Logo, $P(A \cap \bar{B}) = P(A)(1 - P(B)) = P(A).P(\bar{B})$, e A e $\bar{B}$ são independentes.

Propriedades da independência

- A intuição por trás da proposição 2 é a de que B é independente de A se tanto a ocorrência quanto a não ocorrência de A não afetam a probabilidade de B ocorrer, $P(B|A) = P(B)$ e $P(B|\bar{A}) = P(B)$
- Se $A \cap B = \emptyset$, então A e B não são independentes (a menos que um deles tenha probabilidade zero). Não confundir independência com eventos excludentes ($P(A \cap B) = 0$)

Independência entre mais de dois eventos

- Eventos aleatórios A_i são independentes 2 a 2 se $P(A_i \cap A_j) = P(A_i).P(A_j)$, $\forall i \neq j$
- Eventos $A_1, ..., A_n (n \geq 2)$ são mutuamente independentes se $P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{im}) = P(A_{i1}).P(A_{i2})...P(A_{im})$, $\forall 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_m \leq n$, e $\forall n = 2, 3, ..., n$
- Lembrar que a fórmula $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ apenas se aplica quando os eventos A e B são independentes, caso contrário devemos utilizar a probabilidade condicional, $P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$
- Nem todos os eventos que são independentes 2 a 2 são mutuamente independentes

Exemplo: independência entre três eventos

Considere o experimento de jogar dois dados e defina os eventos a seguir:

$A = \{1^{\underline{o}}$ dado mostra $n^{\underline{o}}$ par$\}$
$B = \{2^{\underline{o}}$ dado mostra $n^{\underline{o}}$ ímpar$\}$
$C = \{$ambos os dados mostram $n^{\underline{o}}$ ímpares ou pares$\}$

Note que neste caso, $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$, e
$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4$, mas
$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A).P(B).P(C)$